Umwandlungen verschiedener Darstellungsformen von Ebenen

Umwandlung →	Parameterform	Normalenform	Koordinatenform
Parameterform $\vec{x} = \vec{p} + r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$ ***Beispiel:*** $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$	-	**1.** $\vec{p}$ als Stützvektor übernehmen **2.** Gleichungssystem für Normalenvektor ($\vec{n}\cdot\vec{u}$ = 0 und $\vec{n}\cdot\vec{v}$ = 0) lösen ***Beispiel:*** $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix} = 0$ ⇒ I: $n_1 + 2n_2 = 0$ II: $5n_1 - 2n_3 = 0$ Wähle 1 Wert, z.B. $n_3 = 5$ ⇒ $n_1 = 2,\ n_2 = -1$ ⇒ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = 0$ **ODER:** **2.** mit Kreuzprodukt: $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}$	**1.** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ für $\vec{x}$ einsetzen **2.** Gleichungen so umformen, dass in einer Gleichung die Parameter wegfallen. ***Beispiel:*** I: $x_1 = 4 + r + 5s$ II: $x_2 = 1 + 2r$ III: $x_3 = 3 - 2s$ ⇒ $r = 0{,}5x_2 - 0{,}5$ $s = 1{,}5 - 0{,}5x_3$ ⇒ $x_1 = 4 + (0{,}5x_2 - 0{,}5)$ $+ 5(1{,}5 - 0{,}5x_3)$ ⇒ $x_1 - 0{,}5x_2 + 2{,}5x_3 = 11$ ⇒ $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 22$
Normalenform $[\vec{x} - \vec{p}]\cdot\vec{n} = 0$ ***Beispiel:*** $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = 0$	**1.** Den Stützvektor als $\vec{p}$ übernehmen **2.** Gleichungssysteme aufstellen ($\vec{n}\cdot\vec{u}$ = 0 und $\vec{n}\cdot\vec{v}$ = 0) und geeignete Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wählen. (**Achtung:** $\vec{u}$, $\vec{v}$ dürfen keine Vielfachen voneinander sein) ***Beispiel:*** $2u_1 - u_2 + 5u_3 = 0$ Wähle 2 Werte: z.B. $u_1 = 1,\ u_3 = 0$ ⇒ $u_2 = 2$ $2v_1 - v_2 + 5v_3 = 0$ Wähle 2 Werte: z.B. $v_1 = 5,\ v_2 = 0$ ⇒ $v_3 = -2$ ⇒ $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$	-	**1.** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ für $\vec{x}$ einsetzen **2.** Skalarprodukt berechnen. ***Beispiel:*** $\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ ⇒ $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 22$
Koordinatenform $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ***Beispiel:*** $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 22$	**1.** Koordinatengleichung nach z.B. x_2 auflösen. **2.** Gleichung ergänzen ***Beispiel:*** $x_2 = -22 + 2x_1 + 5x_3$ ⇒ $x_1 = 0 + x_1 + 0$ $x_2 = -22 + 2x_1 + 5x_3$ $x_3 = 0 + 0 + x_3$ ⇒ $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-22\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$ **ODER:** Bestimme drei Punkte (A,B,C) der Ebene und gib die Ebenengleichung wie folgt an: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$	**1.** Stützvektor wählen (z.B. zwei Koordinaten = 0) **2.** Koeffizienten der Koordinatengleichung sind Koordinaten des Normalenvektors. ***Beispiel:*** $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 22$ z.B. $x_2 = x_3 = 0$ ⇒ $x_1 = 11$ ⇒ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}11\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} = 0$	-