

### Infoblatt

Die Bezeichnung „FERMI-Aufgaben“ geht auf den italienischen Kernphysiker ENRICO FERMI (1901 – 1954, Nobelpreis 1938) zurück. Er stellte in seinen Seminaren gerne Aufgaben, die man schrittweise durch Abschätzen oder Beschaffung von Informationen lösen konnte. Die bekannteste FERMI-Aufgabe lautet: „Wie viele Klavierstimmerinnen bzw. Klavierstimmer leben in Chicago?“. Sie wurde neben weiteren Fermi-Aufgaben im Mkid-Kurs der Klasse 6 bearbeitet. Allen FERMI-Aufgaben ist gemeinsam, dass sie zunächst sehr komplex erscheinen und man sich einer Lösung erst durch Zerlegen in kleinere Teilprobleme nähern kann.

Das *Zerlegen eines zunächst unlösbar erscheinenden Problems in kleinere Teilprobleme* ist eine wichtige mathematische Strategie, die nicht nur beim Lösen von FERMI-Aufgaben hilft.

#### • Welche Wasserkosten entstehen in einem Jahr durch einen tropfenden Wasserhahn?

Vorgehensweise:

1.) Volumen des in einem bestimmten Zeitraum ausfließenden Wassers ermitteln. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Experimentell:

- An einem Wasserhahn messen, wie viel ml Wasser in einem bestimmten Zeitraum austreten.

b) Durch Abschätzung:

- Wie viele Tropfen treten aus (z.B. 1 Tropfen pro Sekunde)?

- Wie groß ist das Volumen eines Tropfens?

Dazu mit Hilfe von Pipetten 100 Tropfen in einen Messzylinder tropfen und somit das Volumen eines einzelnen Tropfens ermitteln

oder rechnerische Abschätzung: Durchmesser eines Tropfens ca. 5 mm, Volumenberechnung bei einem

Würfel mit dieser Kantenlänge, Wahl eines Korrekturfaktors (z.B.  $V_{\text{Tropfen}} = \frac{3}{4} \cdot V_{\text{Würfel}}$ )

2.) Das ermittelte Volumen auf die pro Tag bzw. pro Jahr ausfließende Wassermenge hochrechnen.

3.) Wasserpreis ermitteln: Entweder durch Internetrecherche Wasserpreis des Schulortes ermitteln oder von einem Durchschnittswert von 5 € / m<sup>3</sup> ausgehen.

4.) Durch den tropfenden Hahn pro Tag entstehende Kosten berechnen.

Realistischer Wert:

- Volumen des Wassers in 10 Minuten: 35 ml

- Volumen des Wassers pro Tag: 35 ml · 6 · 24 = 5040 ml ≈ 5 l pro Jahr: 365 l · 5 = 1 825 l

- Kosten pro Jahr: 1000 l kosten 5 €, 1 l kostet 0,005 €, 1825 l kosten 0,005 € · 1825 ≈ 9 €

Weitergehende Fragestellungen:

- Welche Wasserkosten entstehen an deinem Schulort in einem Jahr durch tropfende Wasserhähne?
- Wie oft kann man damit ein 25-Meter-Schwimmbecken füllen?

- **Wie viele „Spitzerumdrehungen“ eines Bleistifts werden beim Schreiben von 1000 Wörtern verbraucht?**

Vorgehensweise:

- 1.) Einen Text mit beispielsweise 200 Wörtern schreiben und die dabei verbrauchte Bleistiftlänge messen.
- 2.) Messen, um wieviel die Länge eines Bleistifts durch beispielsweise 20 Spitzerumdrehungen abnimmt.
- 3.) Die beiden Messwerte zueinander ins Verhältnis setzen.

**Material:**

- Glas
- Messzylinder
- evtl. Tropfpipetten (aus Physik- oder Chemiesammlung)
- Bleistifte (idealerweise verschiedener Bleistiftstärken)
- Spitzer

### Didaktischer Kommentar

Bereits im Mkid-Kurs Klasse 6 wurden FERMI-Aufgaben vorgestellt. In der Regel weisen sie durch eine große Alltagsnähe sowie durch hohes Kompetenzerleben beim schrittweisen Lösen des zunächst komplex erscheinenden Problems einen hohen Motivationsgrad auf. In dieser Stunde stehen solche Aufgaben im Vordergrund, zu deren Lösung auch Messungen durchgeführt werden sollten. Hier sollte durch eine Diskussion über die Genauigkeit von Messungen und Messfehler auch ein Bezug zu allgemeinen naturwissenschaftlichen Arbeitsweisen hergestellt werden.

Wenn einige der Schülerinnen und Schüler (SuS) den Mkid-Kurs Klasse 6 besucht haben, können sie zunächst eigenständig in Gruppen (mit maximal 4 SuS) überlegen, wie die Aufgabe gelöst werden kann und wie die dafür notwendigen Informationen beschafft werden können. Bei der anschließenden Diskussion der Ideen können bezüglich des Wasserverbrauchs eines tropfenden Hahns u.a. folgende Aspekte thematisiert werden:

- Art der Versuchsdurchführung: Volumen messen, welches innerhalb eines bestimmten Zeitraums herautropft, oder Zeitdauer messen, bis ein bestimmtes Volumen herausgetropft ist?
- Welcher Zeitraum ist für das Experiment geeignet (Wenn Zeitraum zu kurz: Abweichungen und Ungenauigkeiten fallen sehr stark ins Gewicht; wenn Zeitraum zu lang: Verfahren sehr aufwändig).
- Tropfen alle Wasserhähne in gleichem Maße? (Wenn möglich, sollte man das Experiment an mehreren Wasserhähnen durchführen und den Mittelwert aller Ergebnisse bilden.)

Der Wasserverbrauch kann auch mathematisch abgeschätzt werden (vgl. Infoblatt). Für die mathematische Erfassung des (durchaus unterschiedlichen) Volumens der Tropfen gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Berechnung als Würfel (Tropfendurchmesser entspricht der Kantenlänge). Da der Tropfen nicht den gesamten Würfel einnimmt, sollte das Würfelvolumen anschließend mit einem Korrekturfaktor (z.B. 0,75) multipliziert werden.
- Berechnung als Quader (eventuell danach Multiplikation mit einem Korrekturfaktor)
- Berechnung als Kugel (Die SuS kennen die Kreiszahl  $\pi$ , die Formel für das Kugelvolumen muss durch die Lehrkraft mitgeteilt werden.)

Bei der Berechnung der Wasserkosten (der Wasserpreis wird i.a. pro  $\text{m}^3$  angegeben!) werden vermutlich Schwierigkeiten bei der Umrechnung von Volumeneinheiten auftreten. Es ist also sinnvoll, an der Tafel die Zusammenhänge zwischen  $\text{m}^3$ ,  $\text{dm}^3$ ,  $\text{cm}^3$ , l und ml zu wiederholen und einige Beispielaufgaben zu rechnen.

Bei der Besprechung der Lösung sollten alle Ergebnisse wertgeschätzt werden. Da es – wie bei jeder FERMI-Aufgabe – keine exakte Lösung gibt, sollten schwerpunktmäßig die Unterschiede in den Ergebnissen beleuchtet werden: unterschiedliche Vorgehensweisen, Messungenauigkeiten, Ungenauigkeiten z.B. bei der mathematischen Erfassung des Wasserverbrauchs, Rechenfehler ...

Die „Bleistiftaufgabe“ sollen die SuS in Gruppen nun komplett eigenständig angehen. Idealerweise stellt eine Gruppe in der anschließenden Besprechungsphase ihre Lösung auf einer Overheadfolie oder unter einer Dokumentenkamera vor. Weiterhin sollten auch hier die vermutlich großen Unterschiede zwischen den einzelnen Ergebnissen diskutiert werden (Abhängigkeiten von der schreibenden Person, vom Bleistift und Spitzer, durchschnittliche Anzahl der Buchstaben in einem Wort, Länge des geschriebenen Textes, Ungenauigkeiten bei der Erhebung der Umdrehungen ...)

Zur Stärkung der Problemlösefähigkeit sollte auf jeden Fall auch die Vorgehensweise beim Lösen der Aufgabe(n) reflektiert und ein Zusammenhang zum „gewöhnlichen“ Mathematik-Unterricht hergestellt werden (Wie sind wir vorgegangen? Fallen euch Aufgaben aus dem Mathematikunterricht ein, bei denen diese Vorgehensweise auch hilfreich wäre?).

**Tafelanschrieb**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Kosten durch tropfende Wasserhähne in einem Jahr in ...</p> <p><u>Ergebnis:</u></p> <p>Wie oft kann man damit ein 25-Meter-Schwimmbecken füllen?</p> <p>Maße des 25-m-Beckens:<br/>25 m lang, 15 m breit, 2,20 m tief</p> <p>Volumen des Beckens in m<sup>3</sup></p> <p>Volumen des Beckens in Litern:</p> <p>Anzahl der Beckenfüllungen:</p> <p><u>Ergebnis:</u></p> | <p><b><u>Der tropfende Wasserhahn und andere Fermi-Aufgaben</u></b></p> <p>Welche Kosten entstehen in einem Jahr durch einen tropfenden Wasserhahn?</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>Wie viel Wasser verliert ein tropfender Hahn in 10 Minuten? ...</p> <p>Wie viel Wasser verliert ein tropfender Hahn an einem Tag / in einem Jahr?</p> <p>Alternativ:      Wie viele Tropfen verliert der Wasserhahn in 10 Minuten?<br/>                             Wie viele Tropfen verliert der Wasserhahn in einem Jahr?<br/>                             Durchmesser eines Tropfens:<br/>                             Volumen eines Tropfens:<br/>                             Wie viel Wasser verliert ein tropfender Hahn in einem Jahr?</p> <p>1 m<sup>3</sup> (= 1000 l) Wasser kosten ...</p> <p>... Liter Wasser kosten ....</p> | <p><u>Ergebnis:</u> Durch den tropfenden Wasserhahn entstehen Kosten in Höhe von ... Euro.</p> <p>Welche Wasserkosten entstehen an deinem Schulort in einem Jahr durch tropfende Wasserhähne?</p> <p>Anzahl der Haushalte in ...</p> <p>Anzahl der Wasserhähne in ...</p> <p>Anzahl der tropfenden Hähne ...</p> <p>Volumen des in einem Jahr herausgetropften Wassers in ...</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

So oder so ähnlich von SuS auf Overhead-Folie oder unter Dokumentenkamera vorgestellt:

Wie viele „Spitzerumdrehungen“ eines Bleistifts werden beim Schreiben von 1000 Wörtern verbraucht?

Bleistiftverbrauch beim Schreiben von 200 Wörtern:

Bleistiftverbrauch beim Schreiben von 1000 Wörtern:

Bleistiftverbrauch bei 20 Spitzerumdrehungen:

1 cm Bleistiftverbrauch entspricht .... Spitzerumdrehungen

.... cm Bleistiftverbrauch entsprechen .... Spitzerumdrehungen

Ergebnis:

### Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit

GA ... Gruppenarbeit (max. 4 SuS pro Gruppe!) FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

In einer 45 Min.-Stunde wird man nur die Wasserhahn-Aufgabe (und evtl. die weiterführenden Aufgaben) bearbeiten.

Für eine 90 Min.-Stunde kann man Phase 6 und 7 ausdehnen und weitere FERMI-Aufgaben anfügen.

| Phase / Zeit                                             | L / SuS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Medien                                                                                              |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1. Einstieg</b><br>FEU<br>5 Min.                      | Vorstellen des Problems: <i>Tropfender Wasserhahn - großer Wasserverlust oder zu vernachlässigen?</i><br>Schätzung: Wie viele Liter Wasser fließen pro Tag aus einem tropfenden Wasserhahn? Kosten pro Jahr?<br><br>Anknüpfen an Vorerfahrungen: Das ist eine FERMI-Aufgabe.<br>→ Wie sind wir an frühere FERMI-Aufgaben herangegangen? | Evtl.<br>tropfender<br>Wasserhahn<br><br>Tafel                                                      |
| <b>2. Erarbeitung 1</b><br>GA<br>5 Min.                  | SuS überlegen in Gruppen, wie die Aufgabe gelöst werden kann und wie sie die dazu benötigten Angaben ermitteln können:<br><i>Wie viel Wasser tropft pro Jahr aus einem Hahn?</i><br><i>Wie viel Wasser tropft in 10 Minuten aus einem Hahn?</i><br><i>Was kostet 1 Liter Wasser?</i>                                                    | Alternativ:<br>Erarbeitung im<br>FEU<br>(falls alle SuS nicht den Mkid-Kurs Klasse 6 besucht haben) |
| <b>3. Ergebnis 1</b><br>FEU<br>8 Min.                    | Die SuS stellen ihre Überlegungen vor, diese werden an der Tafel festgehalten (vgl. Tafelanschrieb). Dabei kann man auch auf die verschiedenen Möglichkeiten der Volumenermittlung eingehen (siehe didaktischer Kommentar).                                                                                                             | Tafel                                                                                               |
| <b>4. Erarbeitung 2</b><br>PA bzw. GA<br>15 Min.         | SuS ermitteln fehlende Angaben und berechnen die durch den tropfenden Wasserhahn entstehenden Jahreskosten.<br><br>Puffer für schnelle Gruppen:<br>Wie kommen Unterschiede in den Ergebnissen zustande?<br>Weiterführende Aufgaben (vgl. Infoblatt)                                                                                     | Wasserhahn,<br>Messzylinder,<br>Glas,<br>Tropfpipette<br>Uhr                                        |
| <b>5. Ergebnis 2</b><br>FEU<br>10 Min.                   | Vergleich und Bewertung der Ergebnisse<br>Reflexion über die Vorgehensweise<br>Wie kommen die Unterschiede zustande?                                                                                                                                                                                                                    | Tafel                                                                                               |
| <b>6. Neues Problem und Erarbeitung</b><br>GA<br>12 Min. | Vorstellen des <i>Bleistiftproblems</i><br>SuS finden eine Lösung, dokumentieren ihren Lösungsweg.<br><br>L lobt, aber beobachtet und berät zurückhaltend.                                                                                                                                                                              | Bleistift,<br>Spitzer,<br>Heft / Folie<br>auf Overhead-<br>Projektor                                |

|                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                         |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>7. Ergebnis</b><br>FEU<br>5 Min.      | Vorstellung einer Lösung und Vergleich mit anderen<br>Ergebnissen und Bewertung<br>Reflexion über die Vorgehensweise                                                                                                                                                                                                       | OH-Projektor /<br>Dokumenten-<br>kamera |
| <b>8. optional:<br/>weitere Aufgaben</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wie oft schlägt dein Herz in einem Jahr? Wie oft in deinem Leben, wenn du 80 Jahre wirst?</li> <li>• Wie viel trinkt ein Mensch, der 80 Jahre wird, in seinem Leben? – Wie viele Badewannenfüllungen sind das?</li> </ul> <p>oder Aufgaben, die sich die SuS selbst ausdenken</p> |                                         |