Das Skalarprodukt

Kann man Vektoren auch miteinander multiplizieren?

Es sind zwei Arten der Vektormultiplikation definiert. Hier soll es um das sogenannte *Skalarprodukt* gehen. Was ist ein *Skalar*? Ein Skalar ist nichts weiter als eine Zahl, nur wird im Zusammenhang mit Vektoren der Begriff *Skalar* bevorzugt, um eine Größe zu bezeichnen, welche nur durch einen Betrag gekennzeichnet ist, im Gegensatz zum Vektor, der über Betrag und Richtung verfügt.

Das Ergebnis dieser Art von Vektormultiplikation, das Skalarprodukt, ist also ein Skalar, kein Vektor! Das Skalarprodukt wird aus den Komponenten der Vektoren folgendermaßen berechnet:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

bzw. im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Neben der Schreibweise $\vec{a} \circ \vec{b}$ sind auch $\vec{a} \cdot \vec{b}$ oder $\vec{a} \bullet \vec{b}$ gebräuchlich.

– $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -4$

Was sagt uns dieses Skalarprodukt, die Zahl -4, nun in Bezug auf die Vektoren?

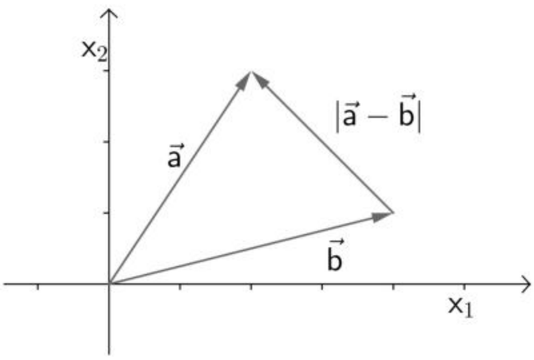
Das Skalarprodukt ist gleich dem Produkt aus den Beträgen der Vektoren und dem Kosinus des von diesen eingeschlossenen Winkels:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \qquad (1)$$

Das kann man zeigen, der Einfachheit halber im $\mathbb{R}^2$.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$



Andererseits lässt sich der Betrag eines Vektors aus seinen Komponenten berechnen.

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2) \\ &= \quad |\vec{a}|^2 \quad + \quad |\vec{b}|^2 \quad - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2) \end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden Beziehungen liefert uns

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 = \vec{a} \circ \vec{b}$$

Was können wir nun mit dem Skalarprodukt anfangen? Im Folgenden werden einige typische Anwendungsfälle vorgestellt.

- Berechnen von Winkeln zwischen Vektoren

– Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein?

Umformen der Gleichung (1) ergibt

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{4\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2)}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \approx 0{,}2182$$

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \cos^{-1}(1/\sqrt{21}) \approx 77{,}4°$$

- Prüfen von Winkeln auf Orthogonalität (Rechtwinkligkeit)

Bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel von 90°, so heißen sie *orthogonal* zueinander, geschrieben $\vec{a} \perp \vec{b}$. Da $\cos 90° = 0$ und damit die rechte Seite der Gleichung (1) Null wird, reicht es hier aus zu prüfen, ob $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$.

– Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7{,}5 \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander?

$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7{,}5 \end{pmatrix} = (-3)\cdot 1 + 6\cdot 3 + 2\cdot(-7{,}5) = 0$, also gilt $\vec{a} \perp \vec{b}$.

- Berechnen orthogonaler Vektoren

– Berechne einen Vektor $\vec{b}$ der Länge 5, welcher orthogonal zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist.

Aus $\vec{a} \perp \vec{b}$ folgt $\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 4{,}5b_1 + (-6)b_2 = 0$

und aus der geforderten Länge $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 = 25$.

Das Gleichungssystem

(I) $4{,}5b_1 - 6b_2 = 0$

(II) $b_1^2 + b_2^2 = 25$

kann z.B. durch Auflösen von (I) nach b_1 und Einsetzen in (II) gelöst werden.

$b_1 = \frac{4}{3}b_2$; $\left(\frac{4}{3}b_2\right)^2 + b_2^2 = 25$; $\frac{25}{9}b_2^2 = 25$; $b_2 = 3$; $b_1 = 4$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Für das Skalarprodukt gelten im $\mathbb{R}^n$ folgende Regeln:

1. $\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{b}\circ\vec{a}$ (Kommutativität)
2. $\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{a}\circ\vec{c}$ (Distributivität)
3. $(r\cdot\vec{a})\circ\vec{b} = r\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})$ (Assoziativität für die Multiplikation mit Skalaren)

• Aufgabe 1: Berechne die Skalarprodukte.

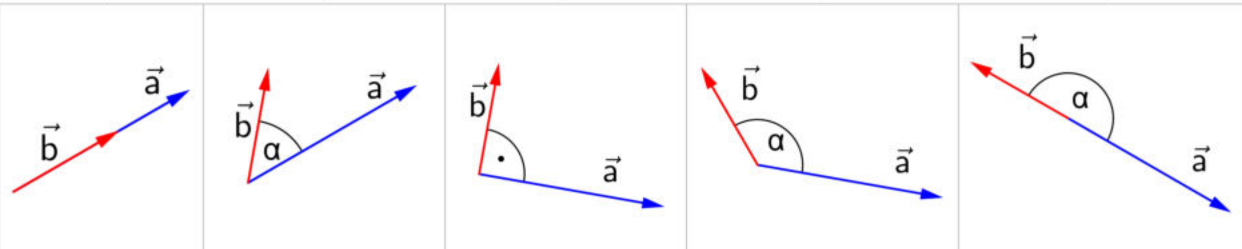
a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix},\ \vec{a}\circ\vec{b}=$ ______

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix},\ \vec{a}\circ\vec{b}=$ ______

• Aufgabe 2: Trage die Aussagen aus dem blauen Kasten unter den dazugehörigen Illustrationen ein. Tipp: Bedenke, dass die Beträge der Vektoren immer positiv sind und vergegenwärtige dir den Verlauf der Kosinusfunktion.

$\vec{a}\circ\vec{b}>0$	$\vec{a}\circ\vec{b}=0$	$\vec{a}\circ\vec{b}<0$	$\vec{a}\circ\vec{b}=-\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert$	$\vec{a}\circ\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert$

a) b) c) d) e)



a)	b)	c)	d)	e)
______	______	______	______	______

• Aufgabe 3: Sind die folgenden Vektoren jeweils orthogonal zueinander? Ergänze die Symbole = oder ≠.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\8\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$ $\quad\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\ \square\ 90°$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\\11\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\ \square\ 90°$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\3\\6\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\ \square\ 90°$

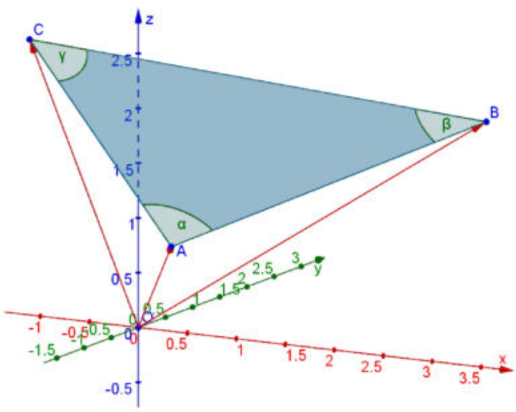
• Aufgabe 4: Berechne die Winkel zwischen den Vektoren.

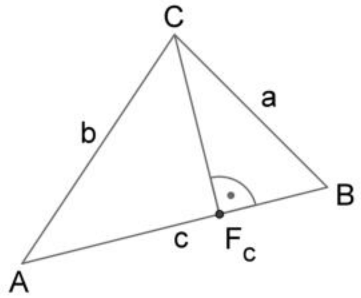
a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix},\ \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=$ ______

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=$ ______

• Aufgabe 5: Die drei Punkte A (2 | −3 | 1,5), B (3 | 1 | 2) und C (0 | −2 | 3) bilden ein Dreieck im ℝ3. Berechne dessen Innenwinkel. Tipp: Berechne zunächst die Seiten als Vektoren durch Subtraktion der Ortsvektoren der Punkte.

α = ________ β = ________ γ = ________





● **Aufgabe 6:** Berechne die Koordinaten des Fußpunktes FC in dem Dreieck, welches durch die Punkte A(1|1|2), B(5|2|3) und C(3|4|4) im $\mathbb{R}3$ beschrieben wird. Tipp: Drücke den Vektor $\overrightarrow{AF_C}$ als Anteil von $\overrightarrow{AB}$ aus, also $\overrightarrow{AF_C} = r \cdot \overrightarrow{AB}$.

F_c = ______________________________