

Infoblatt

Für einen beschränkten konvexen Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt:

$$e + f - k = 2.$$

Der Beweis ist (leider) nicht trivial und deshalb nicht Gegenstand der vorliegenden Stunde.

Im Sinne einer didaktischen Reduktion wird die Konvexitätsvoraussetzung zunächst unterschlagen.

Sie wird erst im zweiten Teil der Stunde eingeführt. Von der Beschränktheit geht man implizit aus.

Bemerkung: Für viele andere Körper ohne Polyeder- oder Konvexitätseigenschaft ist diese Gleichung auch erfüllt (s.u.).

Hat man die Formel gefunden und bestätigt (vgl. Verlaufsplan), kann man die Nicht-Polyeder Zylinder, Kegel und Kugel untersuchen.

Zylinder: $k = 2$; $e = 0$; $f = 3 \rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht erfüllt.

Kegel: $k = 1$; $e = 1$ (Spitze = Ecke?); $f = 2 \rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist erfüllt.

Kugel: $k = 0$; $e = 0$; $f = 1 \rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht erfüllt.

Die Voraussetzung der Konvexität ist „stark“ hinreichend.

Oder anders gesagt: Polyeder, für die die Formel nicht gilt, muss man „mit der Lupe suchen“.

Beispiele nicht-konvexer Polyeder (vgl. Schrägbilder auf dem Blatt „drei nicht-konvexe Körper“):

K1: Für einen *Würfel mit ausgefräster quadratischer Pyramide mit Spitze im Würfelmittelpunkt* ist $k = 16$, $e = 9$ und $f = 9$.

\rightarrow Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist „noch“ erfüllt.

K2: Für einen *Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt* ist $k = 20$, $e = 9$ und $f = 12$.

\rightarrow Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht mehr erfüllt.

K3: Für einen *Würfel mit quaderförmigem Loch* ist $k = 24$, $e = 16$ und $f = 10$.

\rightarrow Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist „wieder“ erfüllt.

Lösungen:

zu den fünf vorgegebenen Körpern des Arbeitsblattes

	„Haus“	Dreiseitiges Prisma	Dreiecks-pyramide	Pyramidenstumpf	Würfel mit abgeschnittener Ecke
$k =$	15	9	6	12	15
$e =$	10	6	4	8	10
$f =$	7	5	4	6	7

Ziele:

- die Problemlösestrategie *aus Beispielen eine Vermutung erzeugen* kennenlernen bzw. erproben
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln
- sich an das Zeichnen von Schrägbildern annähern

Material:

- Arbeitsblatt für die Schülerinnen und Schüler (SuS)
- Körpermodelle: viele verschiedene Polyeder (Prismen, Pyramiden, Pyramidenstumpf, Würfel mit aufgesetzter quadratischer Pyramide)
- Schrägbilder der drei genannten nicht-konvexen Körper K1, K2 und K3 (Folie, Datei ...)

Didaktischer Kommentar

Im Hinblick auf eine möglichst einfache Entdeckung des Sachverhalts $e + f - k = 2$ (e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen und k ... Anzahl der Kanten) ist dieser auf dem Arbeitsblatt für die Schülerinnen und Schüler (SuS) umformuliert zu $k = [e + f - 2]$. Formeln kennen die SuS z.B. vom Rechteck mit den Seitenlängen a und b und dem Umfang U: $U = 2 \cdot (a + b)$

Das erste Beispiel des Arbeitsblattes („Haus“ = Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma) soll gemeinsam bearbeitet werden, um sicherzustellen, dass alle SuS wissen, was zu tun ist. Das ist grundsätzlich ein sehr wichtiger Punkt. Für das „Haus“ ergibt sich: $k = 15$; $e = 10$ und $f = 7$.

Am Beispiel des Umfangs eines Rechtecks erläutert die Lehrkraft, worum es jetzt geht: Angenommen, man kennt die Formel $U = 2 \cdot (a + b)$ nicht. Könnte man sie mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten?

U	a	b
14	5	2
20	5	5
22	9	2
110	50	5

Eventuell kann man noch ein zweites Beispiel liefern. Kann man mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten, wie man H mithilfe von a und b errechnen kann?

Lösung: $H = (a \cdot b) : 2$

Interpretation: die Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b oder Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den „Seiten“ (=Katheten) a und b.

H	a	b
6	4	3
24	6	8
35	7	10
49,5	9	11

Erfahrungsgemäß finden bei dieser Hinführung viele SuS der Unterstufe die Eulersche Polyederformel mithilfe der Zahlenbeispiele selbständig. Wenn nicht, kann die Lehrkraft nach einiger Zeit den folgenden Tipp geben:

„Trage in die freie Spalte einmal die Summe $e + f$ ein. Fällt dir jetzt etwas auf?“

Ganz wichtig ist, dass die Lehrkraft umhergeht und alle Zahleneinträge der SuS auf dem Arbeitsblatt kontrolliert. Wenn diese nicht stimmen, kann man die Formel nicht finden!

Für eine leistungsstarke Gruppe können auch die Zeichnungen auf dem Arbeitsblatt (teilweise) entfernt und von den SuS erstellt werden. Hierfür muss aber einige Zeit eingeplant werden.

Vertiefung:

Nicht nur für SuS der Unterstufe könnte verwirrend sein, dass man aus dem Eulerschen Polyedersatz nicht folgern kann (das ist die so genannte Kehrsatzproblematik – es wird angenommen, die Umkehrung eines Satzes in der Form der Kontraposition ist automatisch gültig):

„Wenn ein Körper kein konvexes Polyeder ist, dann gilt die Formel $k = e + f - 2$ nicht.“

Die Lehrkraft könnte auf den folgenden Sachverhalt hinweisen:

Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.

Wenn eine Zahl nicht durch 4 teilbar ist, könnte sie trotzdem durch 2 teilbar sein, z.B. 6 oder 10.

Sollte man zum Schluss noch Zeit haben, kommt das folgende Knobel-Spiel oft gut an:

Schülerin A überlegt sich eine Formel „mit a und b“. Die Formel sollte nicht zu kompliziert sein.

Zum Beispiel: $T = a + b - 5$ oder $T = 5 \cdot a \cdot b$ oder $T = a \cdot b + a$.

Schülerin A trägt vier Zahlenbeispiele zu seiner Formel in eine Tabelle ein (s.o.).

Schüler B errät die Formel mithilfe der Zahlenbeispiele.

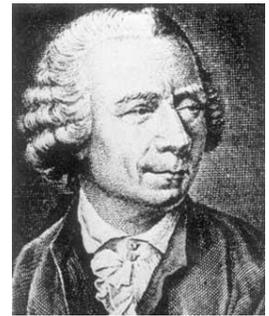
Unter uns: Man müsste natürlich besser allgemein formulieren „eine mögliche Formel“, denn es gibt ja unendlich viele Terme $T(a,b)$ zu vier vorgegebenen Auswertungen.

Die Polyeder-Formel von EULER

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind.
 Beispiele für Polyeder sind Quader, Prismen oder Pyramiden.
 Keine Polyeder sind z.B. Zylinder oder Kegel.

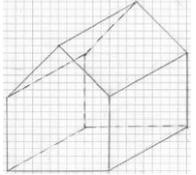
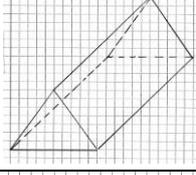
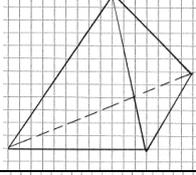
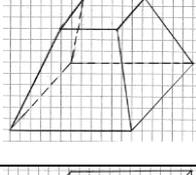
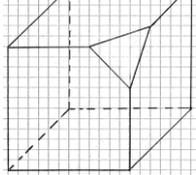
LEONHARD EULER (1707-1783) ist einer der berühmtesten Mathematiker.

Er hat für alle Polyeder eine Formel herausgefunden und begründet,
 wie man die Anzahl der Kanten (k) mithilfe der Anzahl der Ecken (e) und der
 Anzahl der Flächen (f) ausrechnen kann

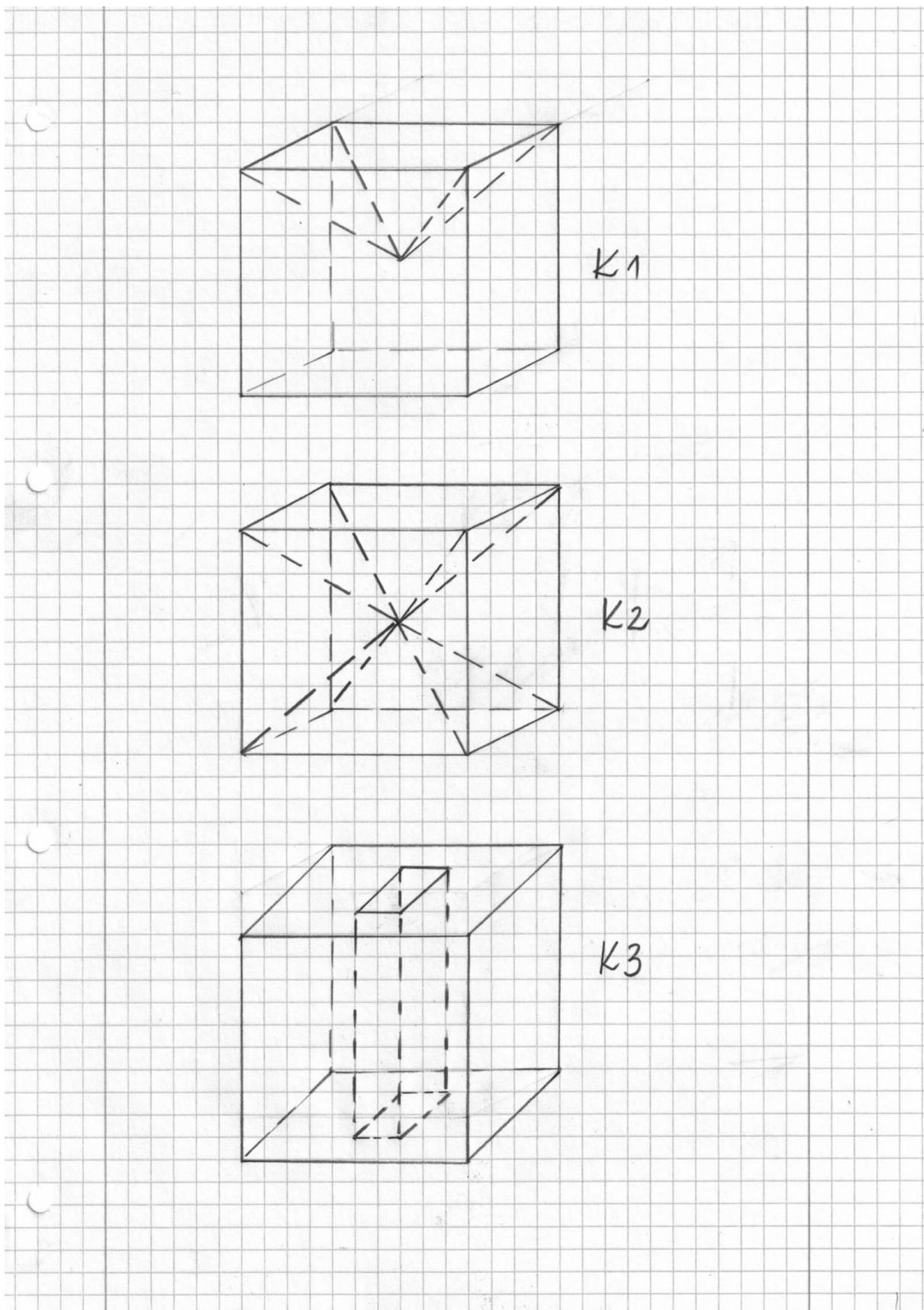


Zähle zunächst die Anzahl der Kanten, Ecken und Flächen und trage sie in die Tabelle ein.
 Findest du in der letzten Spalte einen Zusammenhang zwischen k, e und f?

$k = \dots\dots\dots$

Polyeder	Schrägbild-Skizze	k ... Anzahl der Kanten	e ... Anzahl der Ecken	f ... Anzahl der Flächen	k =
„Haus“ (Prisma)					
Dreiseitiges Prisma					
Dreiecks- Pyramide					
Pyramiden- stumpf					
Würfel mit abgeschnittener Ecke					
(eigenes Beispiel)					

Drei nicht konvexe Körper



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw.

Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 15 Min.	L stellt das Problem vor und zeigt verschiedene Polyedermodelle. L: „Eine allgemeine Formel zu finden ist gar nicht so leicht. Schauen wir uns erst einmal an einem leichteren Beispiel an, wie man überhaupt Formeln finden kann.“ L erläutert am Beispiel des Rechteckumfangs (ggf. an einem weiteren Beispiel, vgl. didaktischer Kommentar), wie mit Hilfe von Zahlenbeispielen eine Formel gefunden werden kann.	Arbeitsblatt Körpermodelle Tafel
2. Erarbeitung I EA/PA 30 Min.	L und SuS bearbeiten das erste Beispiel („Haus“ = <i>Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma</i>). SuS - bearbeiten drei weitere Beispiele - machen sich auf die Suche nach der Formel - nehmen beim Abzählen von Ecken, Kanten und Flächen (je nach räumlichem Vorstellungsvermögen) die bereitgestellten Körper zur Hand oder zählen am Schrägbild ab. L gibt den Tipp: Ecken und Kanten unterschiedlich färben! L ist bei den Schrägbildzeichnungen mit ersten Versuchen zufrieden! L lobt und beobachtet, berät aber zurückhaltend.	Arbeitsblatt Körpermodelle
3. Erarbeitung II EA/PA (Puffer) 10 Min.	SuS produzieren (je nach Arbeitstempo) ein oder mehrere weitere Beispiele und bestätigen die gefundene Formel.	Arbeitsblatt Körpermodelle
4. Sicherung und Reflexion FEU 5 Min.	L und SuS tauschen sich über den Suchprozess aus. L berichtet von seinen Beobachtungen (s.o.). L und SuS testen die Formel $k = e + f - 2$ für die Nicht-Polyeder Zylinder, Kegel und Kugel.	Tafel / Heft?
5. Weitere Problemstellung FEU 15 Min.	L führt die Voraussetzung der Konvexität ein („keine einspringenden Ecken oder Löcher“). L und SuS untersuchen gemeinsam den Körper <i>Würfel mit ausgefräster quadratischer Pyramide mit Spitze im Würfelmittelpunkt</i> . → die Formel gilt noch!	Tafel / Heft?
6. Erarbeitung III EA/PA 15 Min.	SuS suchen nach nicht-konvexen Körpern, bei denen die Formel nicht mehr gilt. - <i>Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt</i> → die Formel gilt nicht! - <i>Würfel mit quaderförmigem Loch</i> → die Formel gilt! L lobt und beobachtet, berät aber zurückhaltend.	Bilder dieser Körper (auf Folie oder elektronisch; siehe Blatt <i>Drei nicht konvexe Körper</i>) Tafel / Heft?