Mehrstufige Zufallsexperimente – Theorie

Du hast bereits gelernt, für ein Ereignis die Wahrscheinlichkeit P(E) anzugeben.

– Ereignis A: „Beim Werfen eines Würfels ist die Augenzahl 6.“

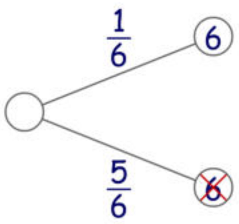
$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}} = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Werfen eines Würfels eine Sechs zu erhalten, beträgt also ca. 16,7%.

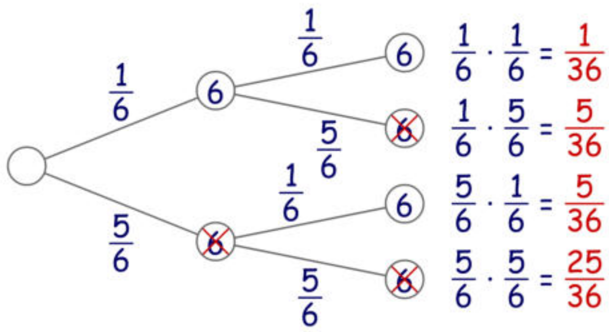
Wie stehen nun aber die Chancen auf eine Sechs, wenn ich ein zweites Mal oder noch häufiger würfele?

Bei mehrmaligem Ausführen des gleichen Zufallsexperimentes handelt es sich um ein mehrstufiges Zufallsexperiment. Um hier die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, empfiehlt sich die Darstellung in Form eines Baumdiagramms.

1.



2.



In diesem Fall bietet es sich an, für das Werfen des Würfels zwei mögliche Ergebnisse zu definieren: „Sechs“ und „keine Sechs“.

1. Der erste Wurf kann zu zwei möglichen Ergebnissen führen. Daher zeichnen wir zwei Pfade zu den entsprechenden Symbolen. Längs der Pfade notieren wir die Wahrscheinlichkeit.
2. Beim zweiten Wurf sind ebenfalls wieder zwei Ergebnisse möglich. Also können wir von beiden Ergebnissen des ersten Wurfes Pfade zu jeweils zwei Ergebnissen zeichnen. Die Wahrscheinlichkeit für jedes der beiden Ergebnisse ist jeweils genau so groß wie beim ersten Wurf und wird an die Pfade geschrieben.

Am Ende unseres Baumdiagramms stehen vier zusammengesetzte Ergebnisse entsprechend den vier möglichen Pfaden. Die Gesamtheit aller möglichen Ergebnisse bezeichnet man als Ergebnismenge Ω.

$$\Omega = \{(6;6);(6;\cancel{6});(\cancel{6};6);(\cancel{6};\cancel{6})\}$$

Für die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses gilt die sogenannte 1. Pfadregel.

1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses in einem mehrstufigen Experiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs seines Pfades.

– Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechsen zu würfeln?

Wir multiplizieren in unserem Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten längs des obersten Pfades, welcher zum gewünschten Ergebnis führt.

$$P(66) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\%$$

Nun betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, genau eine Sechs zu würfeln. Wie wir in unserem Baumdiagramm sehen, sind für dieses Ereignis zwei Ergebnisse günstig. Es führen also zwei Pfade zu einem günstigen Ergebnis.

2. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem mehrstufigen Experiment ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der für dieses Ereignis günstigen Ergebnisse.

– $P(\{6\cancel{6}; \cancel{6}6\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{18} \approx 27{,}8\%$

- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse beträgt immer 1, da eines der Ergebnisse mit Sicherheit eintritt.

– $P(\{66; 6\cancel{6}; \cancel{6}6; \cancel{6}\cancel{6}\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1$

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, eine oder zwei Sechsen zu würfel? Dazu könnte ich die Wahrscheinlichkeiten aller entsprechenden Pfade, also der obersten drei, addieren.

$$P(\{66; 6\cancel{6}; \cancel{6}6\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36} \approx 30{,}6\%$$

Einfacher ist es jedoch, statt des Ereignisses E (eine oder zwei Sechsen) das sogenannte Gegenereignis $\overline{E}$ (keine Sechs) zu betrachten, da zu diesem lediglich ein Pfad führt.

Komplementärregel

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses und des zugehörigen Gegenereignisses ist gleich 1.

– $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ $\qquad$ $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} \approx 30{,}6\%$

Wie du siehst, stimmen die beiden Ergebnisse überein.