

Infoblatt

Voraussetzung und Ziel:

Voraussetzung ist, dass lineare Gleichungen und Textaufgaben hierzu im Regelunterricht behandelt wurden.

Absicht ist, das Wissen der Schülerinnen und Schüler über Textaufgaben zu linearen Gleichungen – auf Textaufgaben zu anderen Gleichungen übertragbar – zu strukturieren und die Vorgehensweise zu üben.

Struktur:

Am Beispiel des Themas Textaufgaben zu linearen Gleichungen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **5 Schritte**, s.u. Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:

Mithilfe von Informationen aus einem Text soll eine Größe bestimmt werden. Erfahrungsgemäß liegt die Schwierigkeit darin, die gegebenen Informationen in eine Gleichung zu transformieren.

Je verwickelter der Text, desto schwieriger die Transformation.

Als Beispiel sei hier der Rätsel-Klassiker „Wie alt ist Anna?“ genannt: *Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna war, als Maria so alt war, wie Anna heute ist. Wie alt ist Anna?*

Die Aufgaben des Arbeitsblattes führen sukzessive zur Bewältigung dieses kniffligen Rätsels.

2. Begriffe:

Variable einführen, Gleichung aufstellen, Äquivalenzumformung, Lösung, Probe am Text (!)

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:

Ein Musterbeispiel:

Dirk ist dreimal so alt wie seine Tochter Elena, er ist 28 Jahre älter als sie. Wie alt ist Elena?

- **Aneignung der Aufgabe:** Aufgabe durchlesen und wichtige Informationen farbig markieren, ggf. eine kleine Zeichnung mit zwei Personen und dem Eintrag dieser Informationen „dreimal so alt“ und „28 Jahre älter“ z.B. mithilfe von Pfeilen anfertigen
- **Weitere Aneignung der Aufgabe** – was in Schulbüchern und im Mathematikunterricht häufig zu kurz kommt:
Für die gesuchte Größe einfach einmal einen Wert annehmen und die Auswirkung beobachten.
- Wenn Elena 10 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 30 Jahre alt, 20 Jahre älter. → Das ist zu wenig.
- Wenn Elena 20 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 60 Jahre alt, 40 Jahre älter. → Das ist zu viel.
Ggf. führt das systematische Weiterprobieren hier direkt zum Ziel, ganz ohne Gleichungskalkül!
- **Variable einführen:** Alter von Elena in Jahren: x
- **Schlussfolgerungen für andere beteiligten Größen ziehen:** Alter von Dirk in Jahren: $3 \cdot x$
- **Gleichung aufstellen:** $3 \cdot x - x = 28$
- **Gleichung lösen:** $x = 14$
- **Probe am Text durchführen:** Wenn Elena 14 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 42 Jahre alt, also 28 Jahre älter. → Das stimmt.
- **Antwortsatz aufschreiben**, der die gestellte Frage beantwortet 😊: Elena ist 14 Jahre alt.
(Nicht: Dirk ist 42 Jahre alt.)

4. Schwierigkeiten:

- beim Verstehen der Textaufgabe, bei der Transformation in eine Gleichung

5. Weiterführende Aufgaben:

- eingeführte Variable ist nicht die gesuchte Größe
- man muss beim Erstellen der Gleichung noch zusätzliche Informationen heranziehen

Didaktischer Kommentar

Hat man das Umformen von linearen Termen und das Lösen von linearen Gleichungen einigermaßen „verdaut“, erscheint mit dem Lösen von Textaufgaben eine neue, ganz andere Hürde.

Das sinnerfassende Lesen und die Formalisierung und Übertragung der Information in mathematische Zeichensprache gilt als besonders anspruchsvoll und schulungsbedürftig.

Ein Beispiel:

In einer Klasse sind drei Mädchen mehr als Jungen. Drücke das durch eine Gleichung aus.

Einige Lösungsansätze:

- Mädchen + 3 = Jungen
- Anzahl der Mädchen + 3 = Anzahl der Jungen
- Beispiel: 15 Mädchen und 12 Jungen, als Gleichung: $15 \text{ Mädchen} - 3 = 12 \text{ Jungen}$
- Anzahl der Mädchen – 3 = Anzahl der Jungen

Einige Erkenntnisse:

- Es geht nicht um die Individuen, sondern um Anzahlen. Diesen Begriff „Anzahl“ muss die Lehrkraft einführen, pflegen und dessen Verwendung einfordern.
- Die richtige Lösung ist kontraintuitiv.
- Zahlenbeispiele helfen bei der Lösungsfindung.

Bei der **Aneignung der Aufgabe** kann es helfen, für die gesuchte Größe einfach einmal einen Wert annehmen und die Auswirkung beobachten.

Im einfachen (Regel-)Fall wird man **für die gesuchte Größe eine Variable einführen** und die anderen beteiligten unbekannten Größen in Abhängigkeit von dieser Variablen ausdrücken. Ansonsten wäre man schon bei linearen Gleichungssystemen.

Bei der **Festlegung der verwendeten Variablen** muss die Größe und die verwendete Einheit genannt werden und nicht nur die Größe oder gar nur die Einheit.

Also: „Länge der Strecke in Meter: x “ (ggf. kürzer: „Länge [m]: x “) und nicht „Länge der Strecke: x “ oder gar „die Meter: x “.

Hier könnte man eine kleine mündliche Übung einschieben. Die Lehrkraft sagt die Größe, die Schülerinnen bzw. Schüler eine mögliche Einheit und umgekehrt:

Länge – Meter; Flächeninhalt – Ar; Volumen – Liter; Gewicht (Masse) – Kilogramm; Preis – Euro pro Kilogramm; Geschwindigkeit – Kilometer pro Stunde; usw. (SuS können auch selbst Aufgaben stellen).

Wichtig ist, dass die **Probe am Text** und nicht an der aufgestellten Gleichung durchgeführt wird. Diese könnte nicht mit dem Aufgabentext harmonisieren.

Der **Clou beim Lösen** von mathematischen Problemen mithilfe **von Gleichungen** lautet so, das sollte man den Schülerinnen und Schülern auch so verdeutlichen: Wenn wir eine Größe nicht kennen, ist das in der Mathematik kein Beinbruch. Wir nennen sie einfach x und rechnen „fröhlich“ damit weiter.

Erhöhte Anforderungen:

- Bereitstellen von Zusatzinformationen wie Winkelsummensatz oder Oberflächeninhalt eines Quaders
- die eingeführte Variable ist nicht die gesuchte Größe – Beispiel: „Wie alt ist Anna?“

Der Aufgabentext in der („hard-core-“) Originalversion (vgl. Infoblatt) ist bewusst knapp und verwickelt formuliert. Eine „Soft-“Variante könnte so lauten:

Maria ist heute 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna vor einigen Jahren war. Damals war Maria so alt, wie Anna heute ist. Wie alt ist Anna?

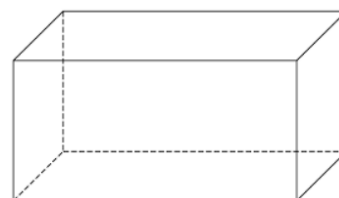
Vergangene Jahre seit „damals“: x ;

Alter von Anna damals [J.]: 12; Alter von Anna heute [J.]: $12 + x$

Alter von Maria damals [J.]: $24 - x$; Alter von Maria heute [J.]: 24

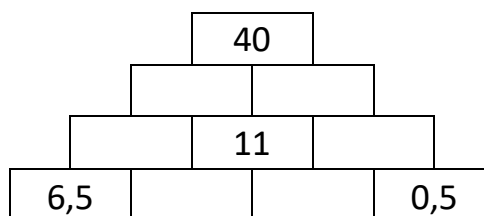
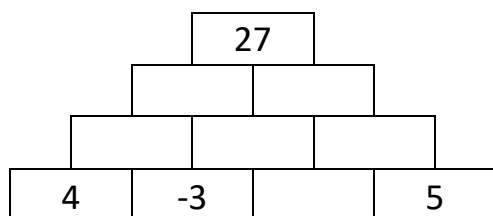
Gleichung: $12 + x = 24 - x$; $x = 6$; Anna ist 18 Jahre alt.

- 1.) Finde die Zahl, deren Doppeltes um 21 vermehrt 57 ergibt.
- 2.) Subtrahiert man von 35 die Hälfte der gesuchten Zahl, so erhält man ihr Doppeltes.
- 3.) Welche Zahl ist um 18 kleiner als ihr Vierfaches?
- 4.) Lars bekommt 12 € geschenkt und besitzt damit jetzt dreimal so viel Geld wie vorher. Wie viel Geld hatte Lars vorher?
- 5.) Arne ist doppelt so alt, wie seine Schwester Lena in zwei Jahren sein wird. Zusammen sind sie jetzt 19 Jahre alt. Wie alt ist Lena?
- 6.) Petra ist dreimal so alt wie ihre Tochter Mareike. In elf Jahren wird sie nur noch doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden jetzt?
- 7.) Susanne wird in zwei Jahren viermal so alt sein, wie ihre Tochter Luise vor drei Jahren war. Heute sind sie zusammen 41 Jahre alt. Wie alt ist Luise?
- 8.) In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich groß und der dritte doppelt so groß wie die anderen beiden zusammen. Wie groß sind die beiden gleich großen Winkel?
- 9.) In einem Viereck ist der zweite Winkel doppelt so groß wie der erste, der dritte dreimal und der vierte viermal so groß wie der erste. Wie groß ist der erste Winkel?
- 10.) Ein Rechteck ist 6cm lang, sein Umfang beträgt 20cm. Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?
- 11.) Ein Quader ist 7cm lang und 4cm breit. Seine Kanten sind zusammen 64cm lang. Welches Volumen hat der Quader?
- 12.) Ein Quader ist 6cm lang und 3cm breit. Sein Oberflächeninhalt beträgt 108cm^2 . Welches Volumen hat der Quader?



- 13.) Fülle die beiden Rechenmauern aus.

Die Zahl in einem Rechteck ergibt sich, indem du die beiden Zahlen darunter addierst.



- 14.) Knobelaufgabe (ganz schwierig): Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna war, als Maria so alt war, wie Anna heute ist. Wie alt ist Anna?

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man eine Auswahl treffen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien								
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L stellt das Thema vor: <i>Wie man das Thema Textaufgaben zu linearen Gleichungen in fünf Schritten erfassen kann.</i> L stellt den Rätsel-Klassiker <i>Wie alt ist Anna?</i> (vgl. Infoblatt) vor und sagt an, dass alle SuS dieses Rätsel am Ende der Stunde werden lösen können ☺. L entwickelt und notiert mit den SuS das Musterbeispiel (vgl. Infoblatt: Struktur 3.) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei so viel wie möglich Informationen von den SuS. L legt hierbei besonderen Wert auf das mehrfache „Durchspielen“ der Aufgabe mit angenommenen Werten, ggf. bis hin zur Lösung. Die Aufgabe wird ggf. also doppelt gelöst. Eventuell Einschub: Kleine Übung mit Größen und zugehörigen Einheiten (vgl. didaktischer Kommentar) L und SuS lösen gemeinsam die Aufgaben 3.) und 7.) des Arbeitsblattes, ggf. auch zuerst durch Probieren. <u>Zu Aufgabe 3.):</u> der intuitive Ansatz $x - 14 = 4 \cdot x$ ist falsch! L-Impulsfragen: „Was ist hier größer, x oder $4 \cdot x$?“ „Was muss man für eine Gleichheit noch hinzufügen?“ <u>Zu Aufgabe 7.):</u> Auf jeden Fall mindestens einmal mit einem angenommenen Alter von Luise „durchspielen“, vgl. z.B. Zahlen am Rand. Alle beteiligten Größen genau aufschreiben. <table><tr><td>Alter von Luise heute [J.]: x</td><td>10</td></tr><tr><td>Alter von Luise vor 3 Jahren [J.]: $x-3$</td><td>7</td></tr><tr><td>Alter von Susanne in 2 Jahren [J.]: $4 \cdot (x-3)$</td><td>28</td></tr><tr><td>Alter von Susanne heute [J.]: $4 \cdot (x-3) - 2$</td><td>26</td></tr></table>	Alter von Luise heute [J.]: x	10	Alter von Luise vor 3 Jahren [J.]: $x-3$	7	Alter von Susanne in 2 Jahren [J.]: $4 \cdot (x-3)$	28	Alter von Susanne heute [J.]: $4 \cdot (x-3) - 2$	26	Tafel / Heft
Alter von Luise heute [J.]: x	10									
Alter von Luise vor 3 Jahren [J.]: $x-3$	7									
Alter von Susanne in 2 Jahren [J.]: $4 \cdot (x-3)$	28									
Alter von Susanne heute [J.]: $4 \cdot (x-3) - 2$	26									
2. Übung I EA / PA 30 Min.	SuS lösen (ggf. zuerst auch durch Probieren!) die Aufgaben 1.), 2.), 4.), 5.) und 6.) des Arbeitsblattes. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Arbeitsblatt / Heft								
3. Erarbeitung II FEU 15 Min.	L und SuS lösen gemeinsam die weiterführende Aufgabe 11.) des Arbeitsblattes (vgl. Infoblatt Struktur 5.).	Tafel / Heft								
4. Übung II EA / PA 30 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 8.), 9.), 10.), 12.), 13.) und 14.) (evtl. in der „Soft“-variante – vgl. didaktischer Kommentar). Lösungen der Aufgabe 11.): 11a) Eintrag im Rechteck der unteren Zeile: 9 11b) Der Eintrag in den beiden Rechtecken der unteren Zeile ist „beliebig“: x und $11 - x$ L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Arbeitsblatt / Heft								